Министерство образования Российской федерации
Управление образованием Тамбовской Области
ТОГБПОУ «Многоотраслевой колледж»

Методические указания и контрольные задания для студентов заочного отделения специальности 08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений»

Моршанск
2016 г.

Пояснительная записка

Заочная форма обучения предполагает самостоятельную работу студента над учебным материалом: чтение учебников, решение задач, выполнение контрольных заданий. Однако, в случае возникновения затруднений при самостоятельном изучении материала, студент может обратиться к преподавателю математики для получения устной консультации.

Студенты заочного отделения, в соответствии с ФГОС СПО изучают курс математики в течение одного года обучения и выполняют одну контрольную работу.

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради в клетку, на титульном листе которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, курс, специальность, домашний адрес студента.
2. Задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением задачи надо полностью переписать ее условие.
3. Ход решения каждой задачи студент обязан оформить аккуратно, в полном соответствии с порядком решения типичной задачи, приведенной в данных методических указаниях.
4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба.
5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.
6. Контрольная работа выполняется самостоятельно.
7. В случае незачета по контрольной работе студент обязан в кратчайший срок исправить все отмеченные ошибки и предоставить работу на повторную проверку.
8. Студент выполняет тот вариант, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра в соответствии с таблицей.

Номер варианта	**Номера заданий**					
1	1	21	31	41	51	61
2	2	22	32	42	52	62
3	3	23	33	43	53	63
4	4	24	34	44	54	64
5	5	25	35	45	55	65
6	6	26	36	46	56	66
7	7	27	37	47	57	67
8	8	28	38	48	58	68
9	9	29	39	49	59	69
10	10	30	40	50	60	70

Содержание программы

Раздел 1. Элементы математического анализа.

Тема 1.1 Функция. Предел функции. Непрерывность функции.

Функция одной независимой переменной. Предел функции. Свойства пределов. Теоремы о пределах функции. Непрерывные функции и их свойства.

Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Сходящаяся последовательность. Число е.

Тема 1.2 Производная и дифференциал функции, их приложение к решению прикладных задач.

Задачи, приводящие к понятию производной. Понятие производной, ее физический и геометрический смысл. Правила нахождения производных.

Правила и формулы дифференцирования. Теоремы дифференцирования. Производные элементарных функций.

Применение производных к исследованию функций. Нахождение экстремума. Наибольшее и наименьшее значение. Дифференциал функции. Приближенные вычисления.

Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Вогнутость кривой. Точки перегиба.

Правило нахождения точек перегиба. Дифференциал функции как главная часть ее приращения. Основные свойства дифференциала.

Практическое занятие:

«Вычисление пределов простейших функций. Вычисление производных элементарных функций в заданных точках. Применение производной к исследованию функции и построению графика».

Тема 1.3 Интеграл и его приложение

Неопределенный интеграл. Понятие первообразной данной функции. Свойства неопределенного интеграла.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как площадь криволинейной трапеции. Его принципиальное отличие от неопределенного интеграла.

Формула Ньютона- Лейбница. Теорема о среднем. Приближенные методы вычисления определенного интеграла.

Использование определенного интеграла для решения задач прикладного характера. Применение определенного интеграла к вычислению площадей и объемов.

Тема 1.4 Дифференциальные уравнения.

Определение дифференциального уравнения. Общее и частное решение дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение I порядка.

Решение задач на составление дифференциальных уравнений. Линейные однородные уравнения. Второго порядка с постоянными коэффициентами.

Практическое занятие:

«Вычисление неопределенного и определенного интегралов. Вычисление площадей плоских фигур, объемов тел вращения. Решение дифференциальных уравнений I порядка».

Раздел 2. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики.

Тема 2.1 Элементы теории вероятностей.

Принцип математической индукции, упорядоченные множества. Элементы комбинаторики: сочетания, перестановки и размещения.

Задачи теории вероятностей. Элементы комбинаторики. Основные аксиомы теории вероятностей. Повторение независимых испытаний.

Случайные величины. Числовые характеристики случайных величин и их свойства. Равномерное и нормальное распределение случайных величин.

Тема 2.2 Элементы математической статистики.

Область применения и задачи математической статистики. Первичная обработка статистических данных, элементы выборки, формирование вариационного ряда.

Совокупность объектов. Генеральная совокупность. Выборочная совокупность. Способы отбора. Статистические распределения.

Практическое занятие:

1. «Решение простейших комбинаторных задач. Первичная обработка статистических данных».

Контрольная работа

Теоретический материал

1. Предел функции

Вычисление предела функции. Пусть функция y=f(x) имеет своим пределом число A: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$=A, причем f(x) изменяется в зависимости от изменения переменной x. Необходимо учитывать, что при неограниченном стремлении переменной x к числу a (x→a) само число a исключается из значений, принимаемых переменной x. Дадим определение предела функции в точке.

Число A называется пределом функции f(x) в точке x_0 и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$=A, если для любого числа ε >0 существует число δ>0 такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0|$<δ, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

При вычислении пределы функции используются теоремы, которые формулируются без доказательств.

Теорема 1

Если существуют пределы функций f(x) и φ(x) при x→a, то существует также и предел их суммы, равный сумме пределов функций f(x) и φ(x):

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) + \varphi(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x)$$

Теорема 2

Если существуют пределы функций f(x) и φ(x) при x→a, то существует также и предел их произведения, равный произведению пределов функций f(x) и φ(x):

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot \varphi(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x)$$

Теорема 3

Если существуют пределы функций f(x) и φ(x) при x→a, предел функции φ(x) отличен от нуля, то существует также предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, равный отношению пределов функций f(x) и φ(x):

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \to a} \left(kf(x) \right) = k \lim_{x \to a} f(x).$$

Следствие 2. Если n – натуральное число, то справедливы соотношения:

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n, \quad \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

Следствие 3. Предел многочлена (целой рациональной функции)

$$F(x)=a_1x^{n-1}+ a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_n$$

при x→a равен значению этого многочлена при x=a, т.е.

$$F(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}$$

при x→c равен значению этой функции при x=c, если c принадлежит области определения этой функции, т.е.

$$\lim_{x\to c} F(x) = F(c).$$

2. Правила раскрытия неопределенностей $\frac{0}{0}$: $\frac{\infty}{\infty}$

Правило раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$ надо числитель и знаменатель дроби разложить на множители так, чтобы можно было сократить.

Правило раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ надо числитель и знаменатель дроби сократить на самую большую степень x в знаменателе.

3. Определение производной функции.

Производной функции y=f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основные правила дифференцирования. Обозначим через C постоянную, x – аргумент, u, υ, w – функции от x, имеющие производные.

Производная алгебраической суммы функций: $(u+\upsilon-w)' = u' + \upsilon' - w'$

Производная произведения двух функций: $(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u$

Производная произведения постоянной на функцию: $(Cu)' = Cu'$

Производная частного (дроби): $\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - \upsilon' u}{\upsilon^2}$

Частные случаи: $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'$; $\left(\frac{C}{\upsilon}\right)' = -\frac{C}{\upsilon^2}\upsilon'$.

Сложная функция. Производная сложной функции. Если y есть функция от u: y = f(u), где и, в свою очередь, есть функция от аргумента x: u = φ(x), т. е. если y зависит от x через промежуточный аргумент u, то y называется сложной функцией от x (функцией от функции): $y = f[\varphi(x)]$

Производная сложной функции равна ее производной по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

или $$y'(x) = y'(u)\cdot u'(x)$$

Формулы дифференцирования

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

$(\lg u)' = \frac{0,4343}{u} \cdot u'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$

$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$

$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$

$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$

$(e^u)' = e^u \cdot u'$

Производные тригонометрических функций

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$

Производные обратных тригонометрических функций

$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (|u| < 1)$

$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' \quad (|u| < 1)$

$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

4. Геометрический смысл производной функции

На линии, заданной уравнением y = f (x), возьмем фиксированную точку $M_0(x_0; y_0)$ и произвольную точку $M(x; y)$. Проведем секущую $M_0 M$ и через α обозначим угол, образованный этой секущей с положительным направлением оси x (рис. 1). При стремлении точки М по линии $y = f(x)$ к точке M_0 секущая $M_0 M$ стремится занять положение прямой M_0K, а угол а стремится стать равным углу φ. Здесь

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где $\Delta y = f(x) - f(x_0)$; $\Delta x = x - x_0$, а $\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0}$

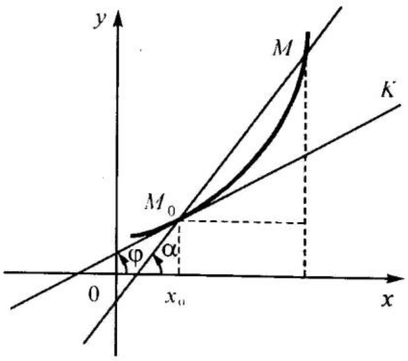


Рис. 1

Определение Касательной к линии в данной ее точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M при стремлении точки М по линии к точке M_0.

Угловым коэффициентом k прямой (в частности, касательной) называется тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси х.

Если $\Delta x \to 0$, то tg $\alpha \to$ tg φ, поэтому $k = tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$

5. Физический смысл производной функции

Пусть точка М перемещается по прямой и известен закон движения этой точки: S=f(t), где S – путь, t – время. Требуется найти истинную скорость движения в момент времени t.

S_0 $\qquad$ $S_0+\Delta S$ $\qquad$ S →

t_0 $\qquad$ $t_0+\Delta t$ $\qquad$ t

Для равномерного движения (т.е движения с постоянной скоростью) скорость – это путь деленный на время.

У нас движение, вообще говоря, неравномерное. Рассмотрим «соседний» момент времени $t_0+\Delta t$. За время Δt точка проделала путь $\Delta S=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$. Средняя скорость на этом промежутке $V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Т.к. Δt и ΔS – малые величины, то можно считать, что $V_{ср}=(V_{ист})t-t_0$. Чтобы это приближенное равенство стало точным, надо перейти к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$V_{ист} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{ср} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = f'(t_0)\,.$$

Таким образом, если известен путь как функция времени, то производная пути по времени – это скорость движения. Это и есть физический смысл производной.

Аналогично, если известна скорость движения V=V(t), то ее производная – это ускорение (скорость изменения скорости). И вообще можно сказать, что производная функции в точке – это скорость изменения функции в этой точке.

6. Определение дифференциала функции

С понятием производной тесно связано понятие **дифференциала**. Чтобы выяснить сущность этого понятия, рассмотрим функцию y =f(x), заданную в интервале (a, b) и имеющую в некоторой точке x этого интервала производную y' = f'´(x). Придадим x приращение Δx, отличное от нуля, но не выводящее из интервала задания функции. Через Δy обозначим соответствующее приращение функции. Так как отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при стремлении Δx к нулю стремится к производной y', а разность между переменной, имеющей предел, и этим пределом есть величина бесконечно малая, то величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - y' стремится к нулю вместе с Δx. Предыдущее равенство можно записать в форме $\Delta y= y'\,\Delta x+\alpha\,\Delta x$, где α – стремится к нулю вместе с Δx.

Обозначив $\alpha\Delta x=\beta$, мы видим, что при бесконечно малом Δx переменная β также есть бесконечно малая величина и притом стремящаяся к нулю быстрее, чем Δx, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{x \to 0}{}' \alpha = 0\,.$$

Вообще, если две бесконечно малые величины ρ и σ связаны между собой условием $\lim \frac{\rho}{\sigma} = 0$, то говорят, что ρ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем σ.

Таким образом, величина β есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δх. Это означает, что при весьма малых Δх величина β во много раз меньше, чем Δх. Доказательство этого факта имеется во многих руководствах по математическому анализу, но оно выходит за рамки нашей программы.

Таким образом, при малых Δх величиной β = α Δх часто пренебрегают и довольствуются приближенной формулой

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x.$$

Определение. Дифференциалом или главной частью приращения функции y=f(x) в точке х, соответствующим приращению Δх, называется произведение производной f '(x), вычисленной в точке х, на Δх.

Дифференциал функции у =f(x) обозначается через dy или df(x). Таким образом,

$$dy = y'\Delta x \text{ или } df(x) = f'(x)\,\Delta x.$$

Из определения дифференциала следует, что он является функцией двух независимых переменных — точки х и приращения Δх.

Одним из основных свойств дифференциала, которое имеет широкое применение на практике — это то, что, пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка, можно приближенно заменять Δу — приращение функции ее дифференциалом dy.

7. Определение первообразной функции

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x), если выполняется равенство F´(x)=f(x).

Например:

1) $f(x)=3x^2$; $F(x)=x^3$; т.к $(x^3)´=3x^2$;
2) f(x)=cosx; F(x)=sinx, т.к (sinx)´=cosx.

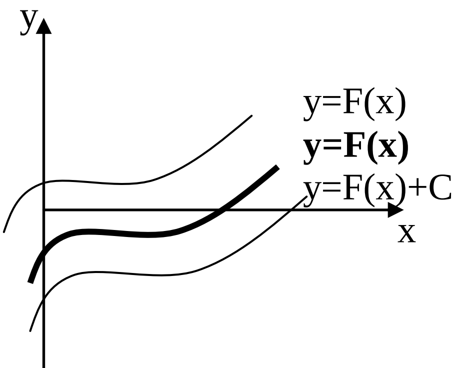
8. Теорема о существовании бесконечного множества первообразных

Теорема. Если функция f(x) имеет первообразную, то она имеет бесконечное множество первообразных F(x)+C, C=const.

Например: $f(x)=5x^4$; $F(x)=x^5$, т.к $(x^5)´=5x^4$; $F(x)=x^5+11$; $F(x)=x^5-22$

9. Геометрическое изображение первообразной

С геометрической точки зрения графики первообразной можно получить друг из друга параллельным переносом вдоль оси Оу.



10. Определение неопределенного интеграла

Определение. Неопределенным интегралом от функции f(x) называется совокупность всех первообразных вида F(x)+C и обозначается $F(x)+C=\int f(x)dx$, где f(x) – подинтегральная функция, f(x)dx – подинтегральное выражение.

Например: $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Определение. Процесс нахождения первообразной называется **интегрированием**.

Интегрирование – это действие обратное дифференцированию.

11. Свойства неопределенного интеграла

Свойства интеграла:

1) $\int(f(x)+\varphi(x))dx=\int f(x)dx+ f\varphi(x)dx$ (Интеграл суммы равен сумме интегралов);

2) $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$ (Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла);

3) $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$ (Интеграл от сложной функции).

12. Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. $\int kdx = kx + C$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
8. $\int e^x dx = e^x + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C = -arcctgx + C$

13. Определение определенного интеграла

Определение. Определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a, b] называется предел ее интегральной суммы (если он существует).

$$\int_a^b (x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i)_\Delta x_i$$

Здесь: f(x) – подинтегральная функция;

f(x)dx – подинтегральное выражение;

a, b – пределы интегрирования: «a» - нижний, «b» - верхний.

Из формулы следует, что $\int_a^b f(x)dx = S$

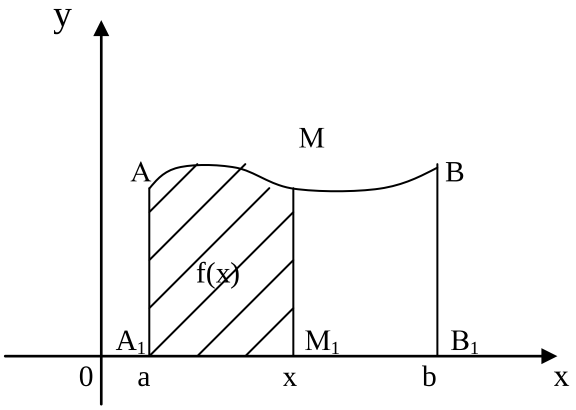
Это равенство выражает геометрический смысл определенного интеграла: определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции.

Вопрос о существовании интеграла, на первый взгляд, далеко не праздный: ведь есть множество способов разбиения отрезка [a, b] на части, есть множество способов выбирать точки ε_i и при этом будут получаться различные суммы. А вот пределы этих разных сумм должны быть одинаковыми – площадь-то одна!

И вообще имеет место **теорема о существовании определенного интеграла**: если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то определенный интеграл от нее на отрезке [a, b] существует и имеет единственное значение, не зависящее ни от разбиения отрезка [a, b] на части, ни от выбора точек.

14. Формула Ньютона-Лейбница

Чтобы получить формулу для вычисления определенного интеграла, еще раз поставим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции.



Рассмотрим криволинейную трапецию A_1ABB_1. Возьмем некоторое значение x∈[a, b]. Ясно, что площадь криволинейной трапеции A_1AMM_1 (заштрихованная на чертеже) зависит «x», т.е является функцией x. Обозначим эту функцию S(x). Очевидно, что S(a)=0, S(b)=S – площадь всей данной криволинейной трапеции.
Можно доказать (мы это делать не будем), что функция S(x) является первообразной для функции f(x), т.е S′(x)=f(x)/

Пусть теперь F(x) тоже какая-нибудь первообразная для f(x), например $F(x)=\int f(x)dx$. Но тогда по свойству первообразных S(x)=F(x)+C.

При x=a получим: S(a)=F(a)+C или 0=F(a)+C

Jnrelf C= - F(a)

Значит S(x)=F(x)-F(a). Положим здесь x=b: S(b)=F(b)-F(a) или S=F(b)-F(a), но $S=\int_a^b f(x)dx$ следовательно $S=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Это и есть формула Ньютона-Лейбница. Она говорит, что для вычисления определенного интеграла надо сначала найти функцию F(x) первообразную для подинтегральной функции; затем в нее подставить пределы интегрирования (верхний и нижний) и затем найти разность F(b)-F(a). Поэтому иногда формулу Ньютона-Лейбница записывают подробнее:

$$\int_b^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

15. Определение криволинейной трапеции

16. Дифференциальные уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается в следующем виде:

$$F(x, y, y') = 0,$$

$$F(x, У, У'') = 0,$$

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}) = 0.$$

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциальнойго уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называете решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой. Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$$

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0$$

где f(x) и φ(x) — функции от x, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. В частном случае f(x) и φ(x) могут быть постоянными величинами. Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки y = uz, где u и z — новые функции от x.

Задание № 1

В задачах 1-10 ответить письменно на теоретические вопросы.

1. Определение предела функции. Правила раскрытия неопределенностей типа $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.
2. Определение производной функции. Геометрический смысл производной функции.
3. Определение производной функции. Физический смысл производной функции.
4. Определение дифференциала функции. Определение дифференцирования. Правила дифференцирования.
5. Определение дифференцирования. Формулы дифференцирования.
6. Определение первообразной функции. Теорема о существовании бесконечного множества первообразных. Геометрическое изображение первообразных.
7. Определение неопределенного интеграла. Свойства интеграла. Таблица неопределенных интегралов.
8. Определение криволинейной трапеции. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница.
9. Определение определенного интеграла. Свойства определенного интеграла.
10. Понятие о дифференциальных уравнениях. Определение дифференциального уравнения, порядок дифференциального уравнения, решение, общее решение, частное решение, интегральная кривая. Дифференциальное уравнение первого порядка.

Задание № 2

В задачах 11-20 вычислить пределы функции:

21. а) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+4)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+5x-8}{11(1-x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^2+4x+2}{x-2x^2+1}$;

22. а) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+x^2+8x+10)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-8x+15}{2(x-5)}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3-4x^2+2x}$;

23. а) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2+1)$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{3(x-5)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+1}{x^3-2x^4+x^2}$;

24. а) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-8x+4)$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{(x-2)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x^4+2}{x-2x^4+1}$;

25. а) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2-4x+5)$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x-2)}{3x^2-8x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+4}{x^3+4x^2+2x}$;

26. а) $\lim\limits_{x\to 2}(-3x^2+4x-8)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4(1-x)}{3x^2+5x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x+4}{x^2-2x^4+x^3}$;

27. а) $\lim\limits_{x\to 1}(4x^4-5x^2+4)$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-9x+20}{2x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x^3+3}{x-2x^3+1}$;

28. а) $\lim\limits_{x\to 0}(4x^3-2x-1)$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-14x+8}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-5x-4}{x^3+2x+3}$;

29. а) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+4x)$;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+7x-6}{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+x-1}{3x^2+2x^4-x}$;

30. а) $\lim\limits_{x\to-1}(x^3-x^2+1)$;

б) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{2x^2+x-15}{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+4x+2}{x-2x^3+1}$.

Решение типовых примеров

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to3}(4x-x^2+8)$.

В этом примере необходимо провести непосредственную подстановку.

$\lim\limits_{x\to3}(4x-x^2+8)=4\cdot3-3^2+8=12-9+8=11$

2) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2x^2+x-10}{5x-10}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Непосредственная подстановка приводит к неопределенности типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим члены дроби на общий множитель (x-2).

Числитель: $2x^2+x-10=2(x-2)(x+\frac{5}{2})$

$2x^2+x-10=0$

$D=1-4\cdot2(-10)=1+80=81$

$x_1=\dfrac{-1+\sqrt{81}}{2\times2}=\dfrac{-1+9}{4}=\dfrac{8}{4}=2$

$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{81}}{2\times2}=\dfrac{-1-9}{4}=-\dfrac{10}{4}=-\dfrac{5}{2}$

Используемые формулы:

– расположение квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

– $D=b^2-4ac$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

Знаменатель: $5x-10=5(x-2)$

$$\lim_{x\to2} \frac{2x^2+x-10}{5x-10}=\lim_{x\to2} \frac{2(x-2)(x+\frac{5}{2})}{5(x-2)}=\lim_{x\to2} \frac{2x+5}{5}=\frac{2\times2+5}{5}=\frac{9}{5}$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-2x^2+x-1}{5x^3+3x^2+10x+2} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

В этом примере получается неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, избавиться от которой можно вынесением за скобки в числителе и в знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-2x^2+x-1}{5x^3+3x^2+10x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(5-\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}+\frac{2}{x^3})} = \frac{3}{5}$$

Задание № 3

В задачах 31-40 исследовать заданную функцию методами дифференциального исчисления и построить эскиз графика. Исследование функций рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) Найти область определения функции;
2) Найти производную функции;
3) Найти точки экстремума;
4) Определить промежутки монотонности функции;
5) Найти точки перегиба функции;
6) Определить промежутки выпуклости и вогнутости функции;
7) Найти значение функции в точках экстремума и перегиба;
8) Построить эскиз графика.

31. $y=2x^3-9x^2+12x-5$
32. $y=x^3-6x^2+9x+1$
33. $y=x^3-3x^2-9x+10$
34. $y=x^3+3x^2-9x-10$
35. $y=x^3+6x^2+9x+2$
36. $y=2x^3-3x^2-12x+5$
37. $y=2x^3+3x^2-12x-8$
38. $y=2x^3+9x^2+12x+7$
39. $y=2x^3-15x^2+36x-32$
40. $y=2x^3-15x^2+24x+4$

Решение типового примера

$y=x^3+9x^2+15x-9$

1) Областью определения данной функции является все действительные значения аргумента x, т.е D(y)=R

2) Найдем производную функции

$y' = 3x^2 + 18x + 15$

3) Найдем точки экстремума, для этого приравняем производную к нулю.

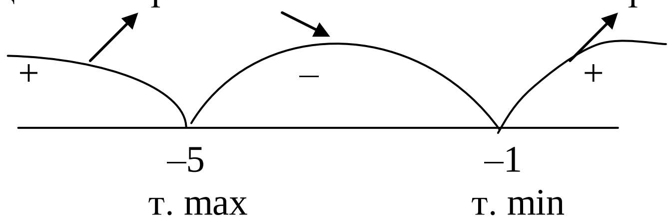
$3x^2 + 18x + 15 = 0$, :/3

$x^2 + 6x + 5 = 0$

D=36-4·5=16; $x_1 = \frac{-6+\sqrt{16}}{2} = -1$; $x_2 = \frac{-6-\sqrt{16}}{2} = -5$

Значит функция имеет две критические точки x_1=-1, x_2=-5.

4) Найдем промежутки монотонности функции, для этого разбиваем область определения критическими точками на интервалы



Определим знак производной на каждом интервале:

$y'(0) = 3\cdot0^2 + 18\cdot0 + 15 = 15 > 0$, значит на интервале (-1;+∞) производная функции положительная, значение функции возрастает.

$y'(-2) = 3\cdot(-2)^2 + 18\cdot(-2) + 15 = -9 < 0$, на промежутке (-5;-1) производная функции отрицательная, значения функции убывает.

$y'(-6) = 3\cdot(-6)^2 + 18\cdot(-6) + 15 = 30 > 0$, на промежутке (-∞;-5) производная функции положительная, значения функции возрастает.

Отсюда следует, что x_1=-5 – точка максимума (max), x_2=-1 – точка минимума (min).

5) Найдем точки перегиба функции, для этого найдем вторую производную функции и приравниваем ее к нулю:

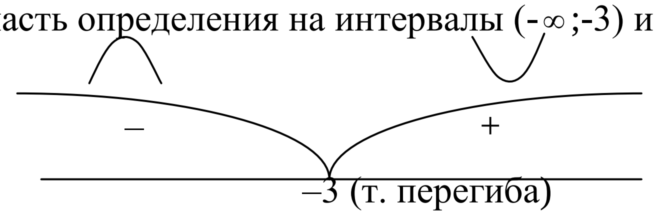
$y'' = 6x + 18$

$6x + 18 = 0$

$6x = -18$

x=-3 – критическая точка.

6) Определим промежутки выпуклости и вогнутости функции. Разобьем область определения на интервалы (-∞;-3) и (-3;+ ∞)



Определим знак второй производной на каждом интервале:

$y''(0) = 6\cdot0 + 18 = 18 > 0$;

$y'' = 6\cdot(-4) + 18 = -6 < 0$.

На промежутке (-3;+ ∞) – функция выпуклая; а на промежутке (-∞;-3) – функция вогнутая, значит x=-3 – точка перегиба.

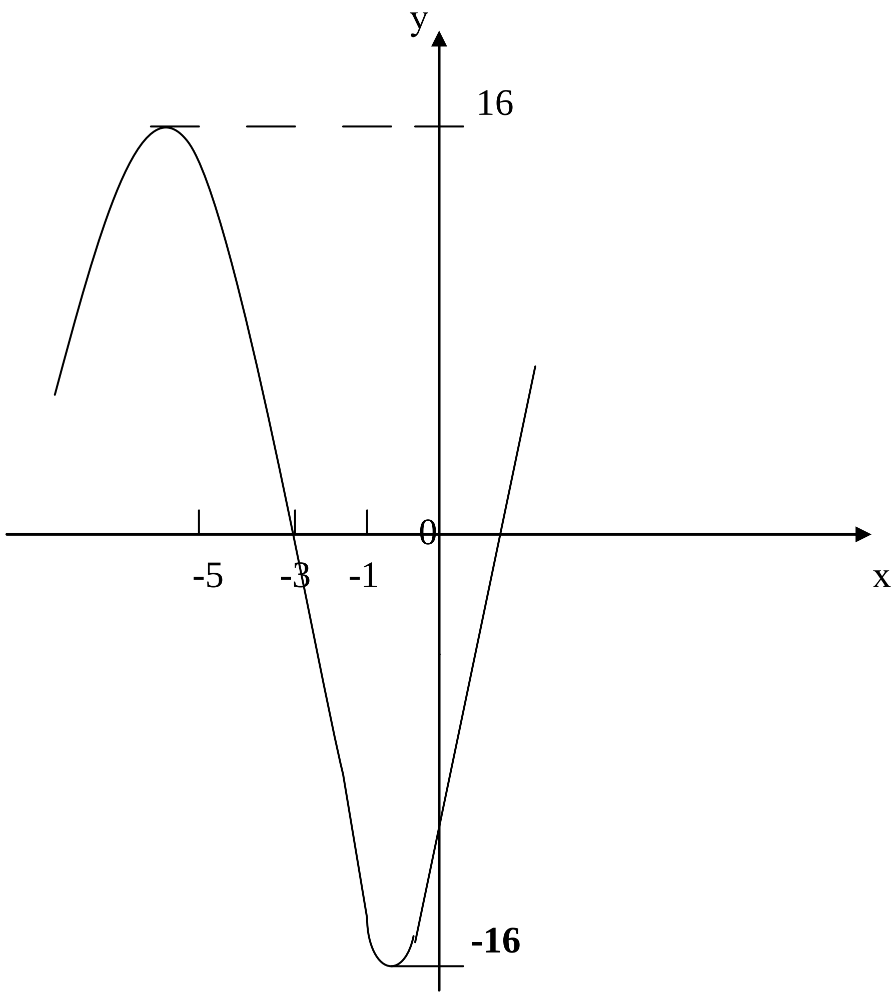
7) Найдем значение функции в точках в точках экстремума и перегиба

$y_{max}=y(-5)=((-5)^3+9(-5)^2+15(-5)-9)=16$

$y_{min}=y(-1)=((-1)^3+9(-1)^2+15(-1)-9)=-16$

$y_{перегиба}=y(-3)=((-3)^3+9(-3)^2+15(-3)-9)=0$

8) Построим эскиз графика с учетом предыдущих исследований



Задание № 4

В задачах 41-50 вычислить неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием.

41. а) $\int (3x^{-4}+8x^{-5})dx$;

б) $\int (7-6x)^3 dx$.

42. а) $\int (x^3-6x^5)dx$;

б) $\int (4+3x)^2 dx$.

43. а) $\int (2x^8+4x^{-2})dx$;

б) $\int \ln 3x \, dx$.

44. а) $\int (e^{x} - 2x) dx$;

б) $\int \cos 4x \, dx$.

45. а) $\int (3^{x} - e^{x} - 1) \, dx$;

б) $\int (\sin 3x) \, dx$.

46. а) $\int (\sin x - 5) \, dx$;

б) $\int \ln(x+3) \, dx$.

47. а) $\int (4 - 3\cos x) \, dx$;

б) $\int (5-4x)^{4} dx$.

48. а) $\int (4^{x} - 2\sin x - x) \, dx$;

б) $\int \cos^{2} x \, dx$.

49. а) $\int (4x^{3} - 6x^{2} + 4x - 3) \, dx$;

б) $\int \sin^{2} x \, dx$.

50. а) $\int (x^{-4} - x^{-3} + 1) \, dx$;

б) $\int \ln(x-8) \, dx$.

Решение типового примера

1) Найти неопределенные интегралы, результат проверить дифференцированием.

а) $\int (2x^{-4} + 5x - 4\cos x)dx = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{5x^{1+1}}{1+1} - 4\sin x + C = -\frac{2x^{-3}3}{-3} + \frac{5x^{2}}{2} - 4\sin x + C$

Проверка дифференцированием:

$(-\frac{2x^{-3}}{3} + \frac{5x^{2}}{2} - 4\sin + C)' = -\frac{2}{3}(-3)x^{-4} + \frac{5}{2}2x - 4\cos = 2x^{-4} + 5x - 4\cos x$

б) $\int (8x-3)^{3} dx$

Применим подстановку

$8x - 3 = t$

$8dx = dt$

$dx = \frac{dt}{8}$

$$\int (8x-3)^3 dx = \int t^3 \frac{dt}{8} = \frac{1}{8}\int t^3 dt = \frac{1}{8}\frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4}{32} + C = \frac{(8x-3)^4}{32} + C$$

Проверка дифференцированием:

$$\left(\frac{(8x-3)^4}{32} + C\right)' = \frac{4(8x-3)^3(8x-3)'}{32} = \frac{(8x-3)^3 8}{8} = (8x-3)^3$$

Используемые формулы: $(x^n)' = nx^{n-1}$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(cU_x)' = cU_x{}'$$

$$\int x^n dx = \frac{x^n + 1}{n+1} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Задание № 5

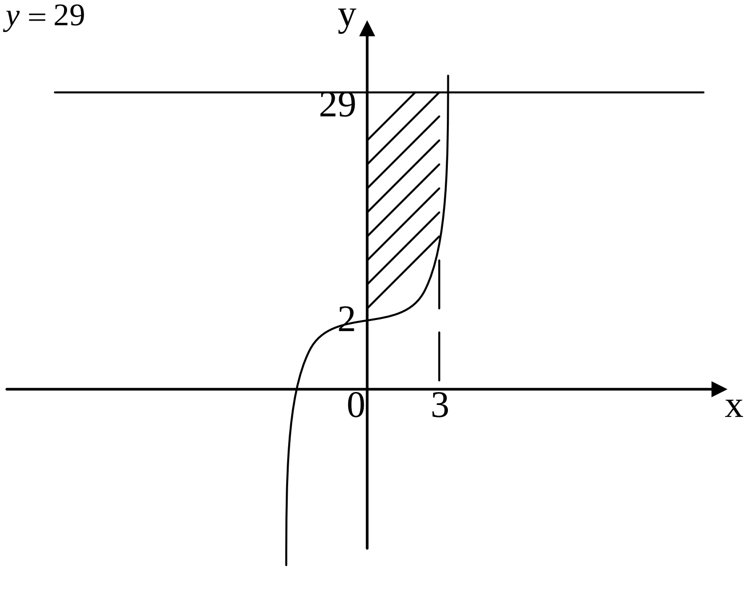
В задачах 51-60 вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями:

51. $y=x^2$, $y=49$.
52. $y=x^3$, $y=8$.
53. $y=x^2+1$, $x=-2$, $x=2$.
54. $y=x^2$, $y=64$.
55. $y=x+2$, $x=2$, $x=4$.
56. $y=x^3+1$, $y=9$.
57. $y=x^2+1$, $y=26$.
58. $y=2x$, $x=1$, $x=2$.
59. $y=x^3+1$, $y=28$.
60. $y=x^2+2$, $y=27$.

Решение типового примера

Вычислить площадь фигуры, ограниченную заданными линиями:

$y = x^3 + 2, \quad y = 29$



Найдем абсциссы точек пересечения заданных линий

$\begin{cases} y = x^3 + 2 \\ y = 29 \end{cases}$; $\begin{cases} x^3 + 2 = 29 \\ y = 29 \end{cases}$; $\begin{cases} x^3 = 27 \\ y = 29 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 3 \\ y = 29 \end{cases}$

Площадь фигуры $S_{фиг} = S_{прям} - S_{кр.тр}$

$S_{прям} = 3 \times 29 = 87(ед^2)$

$$S_{кр.тр} = \int_0^3 (x^3 + 2)dx = \left(\frac{x^4}{4} + 2x\right)\Big|_0^3 = \frac{3^4}{4} + 2 \times 3 - \frac{0^4}{4} - 2 \times 0 = \frac{81}{4} + 6 = 20\frac{1}{4}(ед^2)$$

$S_{фиг} = 87 - 26\frac{1}{4} = 60\frac{3}{4}(ед^2)$

Ответ: площадь фигуры составляет $60\frac{3}{4}(ед^2)$

Используемые формулы: Ньютона-Лейбница

$$S_{кр.тр} = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int cdx = cx + C$$

Задание № 6

В задачах 61-70 найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка:

61. $\begin{cases} \dfrac{dy}{4x^3} = \dfrac{dx}{y}; \\ y(0) = 1 \end{cases}$

62. $\begin{cases} \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dx}{y}; \\ y(-2) = 4 \end{cases}$

63. $\begin{cases} \dfrac{dy}{x^2} = \dfrac{dx}{y^2}; \\ y(0) = 2 \end{cases}$

64. $\begin{cases} dy = 3x^2 dx; \\ y(2) = 4 \end{cases}$

65. $\begin{cases} ydy = (x-1)dx; \\ y(0) = 4 \end{cases}$

66. $\begin{cases} \dfrac{dy}{x^2} = \dfrac{dx}{y}; \\ y(0) = 2 \end{cases}$

67. $\begin{cases} \dfrac{dy}{2x} = dx \\ y(1) = 6 \end{cases}$;

68. $\begin{cases} ydy = (x+2)dx \\ y(2) = 8 \end{cases}$;

69. $\begin{cases} \dfrac{dy}{2x} = \dfrac{dx}{2y} \\ y(2) = 4 \end{cases}$;

70. $\begin{cases} dy = 4x^3dx \\ y(1) = 9 \end{cases}$

Решение типового примера

Найти частное решение дифференцированного уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{2x^2} = \dfrac{dx}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Это дифференцированное уравнение с разделяющимися переменными. Производим разделение переменных: $ydy = 2x^2dx$

Интегрируя обе части равенства, получаем: $\int ydy = \int 2x^2dx$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2x^3}{3} + C$$

$$y^2 = \frac{4}{3}x^3 + 2C$$

Используя начальное условие, вычислим, соответствующее ему значение постоянное С: $\frac{4}{3} \times 0^3 + 2C = 2^2$; $2C = 4$; $C = 2$

Поэтому частное решение исходного дифференцированного уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию, имеет вид: $y^2 = \frac{4}{3}x^3 + 4$